Introducción a la Programación Lineal

Ejemplo

Gepetto S.L., manufactura muñecos y trenes de madera.

Cada muñeco:

- Produce un beneficio neto de 3 €.
- Requiere 2 horas de trabajo de acabado.
- Requiere 1 hora de trabajo de carpinteria.

Cada tren:

- Produce un beneficio neto de 2 €.
- Requiere 1 hora de trabajo de acabado.
- Requiere 1 hora trabajo de carpinteria.

Cada semana Gepetto puede disponer de:

- Todo el material que necesite.
- Solamente 100 horas de acabado.
- Solamente 80 horas de carpinteria.

También:

- La demanda de trenes puede ser cualquiera (sin límite).
- La demanda de muñecos es como mucho 40.

Gepetto quiere maximizar sus beneficios.
¿Cuántos muñecos y cuántos trenes debe fabricar?

Este problema es un ejemplo típico de un problema de programación lineal (PPL).

Variables de Decisión

x = nº de muñecos producidos a la semana

y = nº de trenes producidos a la semana

Función Objetivo. En cualquier PPL, la decisión a tomar es como maximizar (normalmente el beneficio) o minimizar (el coste) de alguna función de las variables de decisión. Esta función a maximizar o minimizar se llama **función objetivo**.

El objetivo de Gepetto es elegir valores de x e y para maximizar 3x + 2y. Usaremos la variable z para denotar el valor de la función objetivo. La función objetivo de Gepetto es:

$$\boxed{\text{Max } z = 3x + 2y}$$

Restricciones

Son desigualdades que limitan los posibles valores de las variables de decisión.

En este problema las restricciones vienen dadas por la disponibilidad de horas de acabado y carpintería y por la demanda de muñecos.

También suele haber restricciones de signo o no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Restricciones

Cuando *x* e *y* crecen, la función objetivo de Gepetto también crece. Pero no puede crecer indefinidamente porque, para Gepetto, los valores de x e y están limitados por las siguientes tres restricciones:

Restricción 1: no más de 100 horas de tiempo de acabado pueden ser usadas.

Restricción 2: no más de 80 horas de tiempo de carpinteria pueden ser usadas.

Restricción 3: limitación de demanda, no deben fabricarse más de 40 muñecos.

Estas tres restricciones pueden expresarse matematicamente por las siguientes desigualdades:

Restricción 1: $2x + y \leq 100$

Restricción 2: $x + y \leq 80$

Restricción 3: $x \leq 40$

Además, tenemos las restricciones de signo: $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Formulación matemática del PPL

Variables de Decisión x = nº de muñecos producidos a la semana
y = nº de trenes producidos a la semana

	Muñeco	Tren	
Beneficio	3	2	
Acabado	2	1	≤ 100
Carpintería	1	1	≤ 80
Demanda	≤ 40		

$\text{Max } z = 3x + 2y$ (función objetivo)

$2x + y \leq 100$ (acabado)

$x + y \leq 80$ (carpinteria)

$x \leq 40$ (demanda muñecos)

$x \geq 0$ (restricción de signo)

$y \geq 0$ (restricción de signo)

Formulación matemática del PPL

Para el problema de Gepetto, combinando las restricciones de signo $x \geq 0$ e $y \geq 0$ con la función objetivo y las restricciones, tenemos el siguiente modelo de optimización:

Max $z = 3x + 2y$ (función objetivo)

Sujeto a (s.a:)

$2x + y \leq 100$	(restricción de acabado)
$x + y \leq 80$	(restricción de carpinteria)
$x \leq 40$	(restricción de demanda de muñecos)
$x \geq 0$	(restricción de signo)
$y \geq 0$	(restricción de signo)

Región factible

La **región factible** de un PPL es el conjunto de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones. Es la región del plano delimitada por el sistema de desigualdades que forman las restricciones.

$x = 40$ e $y = 20$ está en la región factible porque satisfacen todas las restricciones de Gepetto.

Sin embargo, $x = 15$, $y = 70$ no está en la región factible porque este punto no satisface la restricción de carpinteria

$$[15 + 70 > 80].$$

Restricciones de Gepetto

$2x + y \leq 100$	**(restricción finalizado)**
$x + y \leq 80$	**(restricción carpintería)**
$x \leq 40$	**(restricción demanda)**
$x \geq 0$	**(restricción signo)**
$y \geq 0$	**(restricción signo)**

Solución óptima

Para un problema de maximización, una **solución óptima** es un punto en la región factible en el cual la función objetivo tiene un valor máximo. Para un problema de minimización, una solución óptima es un punto en la región factible en el cual la función objetivo tiene un valor mínimo.

La mayoría de PPL tienen solamente una solución óptima. Sin embargo, algunos PPL no tienen solución óptima, y otros PPL tienen un número infinito de soluciones.

Más adelante veremos que la solución del PPL de Gepetto es $x = 20$ e $y = 60$. Esta solución da un valor de la función objetivo de:

$$z = 3x + 2y = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 60 = 180 \text{ €}$$

Se puede demostrar que la **solución óptima** de un PPL está siempre en la frontera de la región factible, en un vértice (si la solución es única) o en un segmento entre dos vértices contiguos (si hay infinitas soluciones)

Cuando decimos que $x = 20$ e $y = 60$ es la solución óptima, estamos diciendo que, en ningún punto en la región factible, la función objetivo tiene un valor (beneficio) superior a 180.

Representación Gráfica de las restricciones

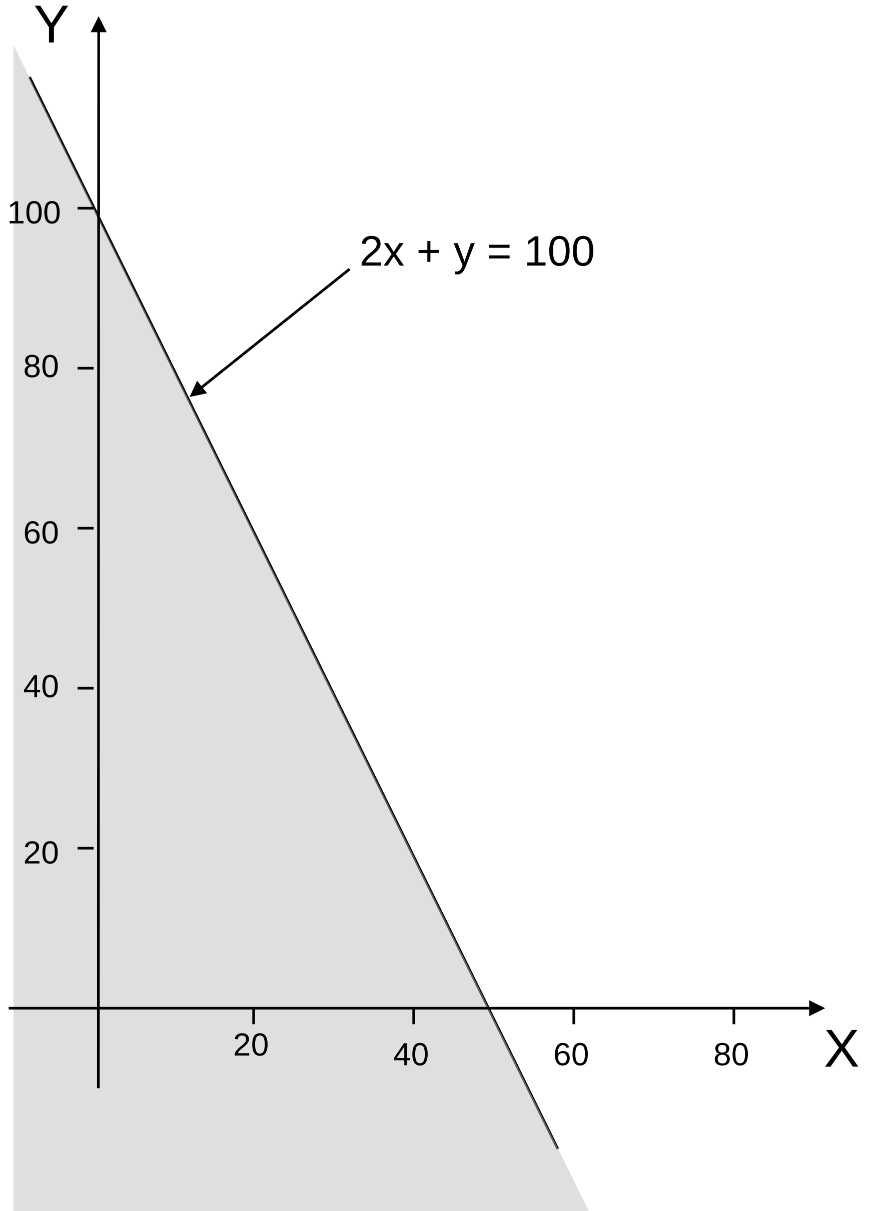
Cualquier PPL con sólo dos variables puede resolverse gráficamente.

Por ejemplo, para representar gráficamente la primera restricción, **2x + y ≤ 100** :
Dibujamos la recta 2x + y = 100

Elegimos el semiplano que cumple la desigualdad: el punto (0, 0) la cumple

(2·0 + 0 ≤ 100),

así que tomamos el semiplano que lo contiene.



Dibujar la región factible

Puesto que el PPL de Gepetto tiene dos variables, se puede resolver gráficamente. La región factible es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las restricciones:

$\mathbf{2x + y \leq 100}$ (restricción de acabado)

$\mathbf{x + y \leq 80}$ (restricción de carpintería)

$\mathbf{x \leq 40}$ (restricción de demanda)

$\mathbf{x \geq 0}$ (restricción de signo)

$\mathbf{y \geq 0}$ (restricción de signo)

Vamos a dibujar la región factible que satisface estas restricciones.

Dibujar la región factible

Restricciones

2 x + y ≤ 100

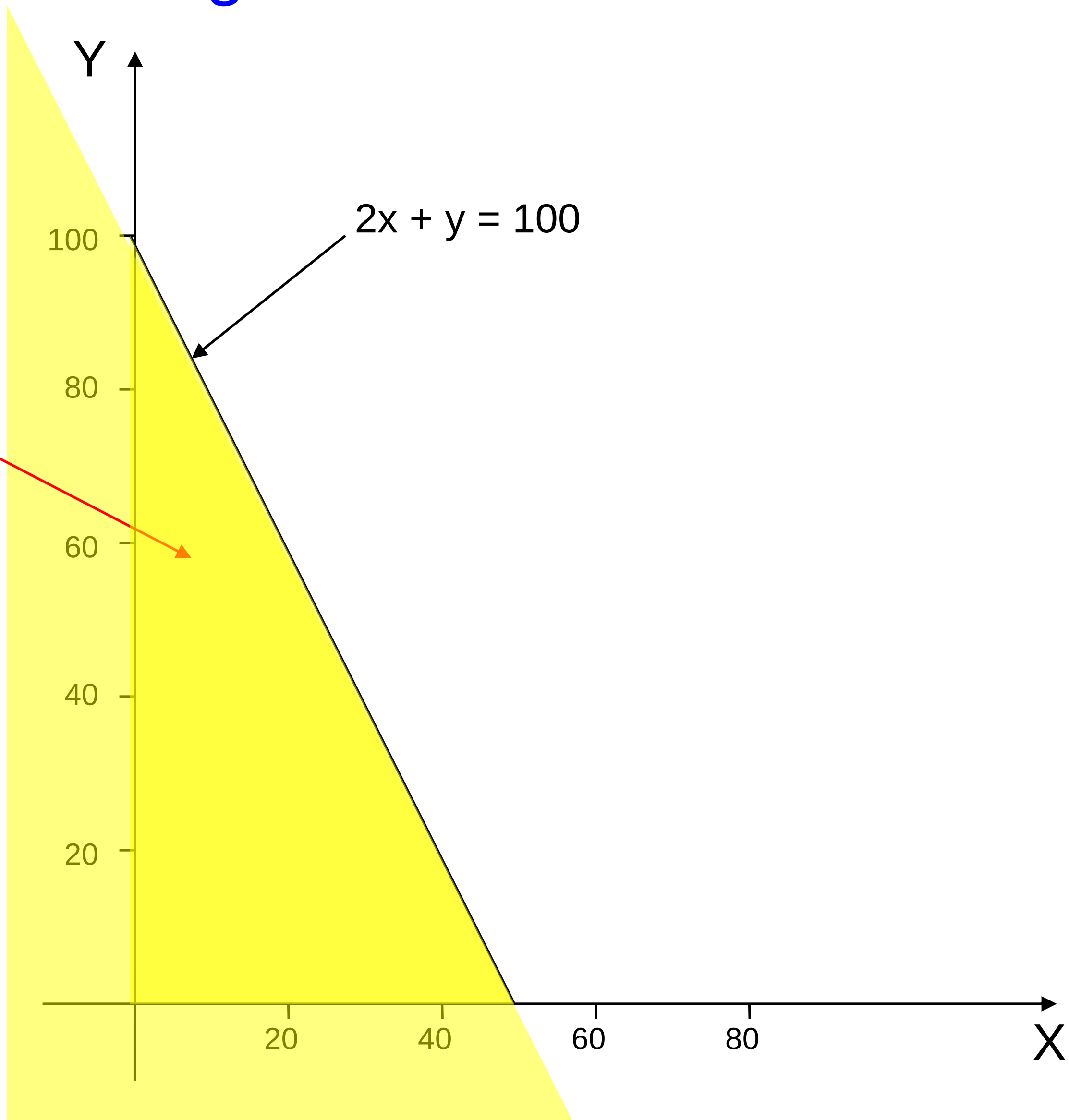
x + y ≤ 80

x ≤ 40

x ≥ 0

y ≥ 0

Teniendo en cuenta las restricciones de signo (**x ≥ 0, y ≥ 0**), nos queda:



Dibujar la región factible

Restricciones

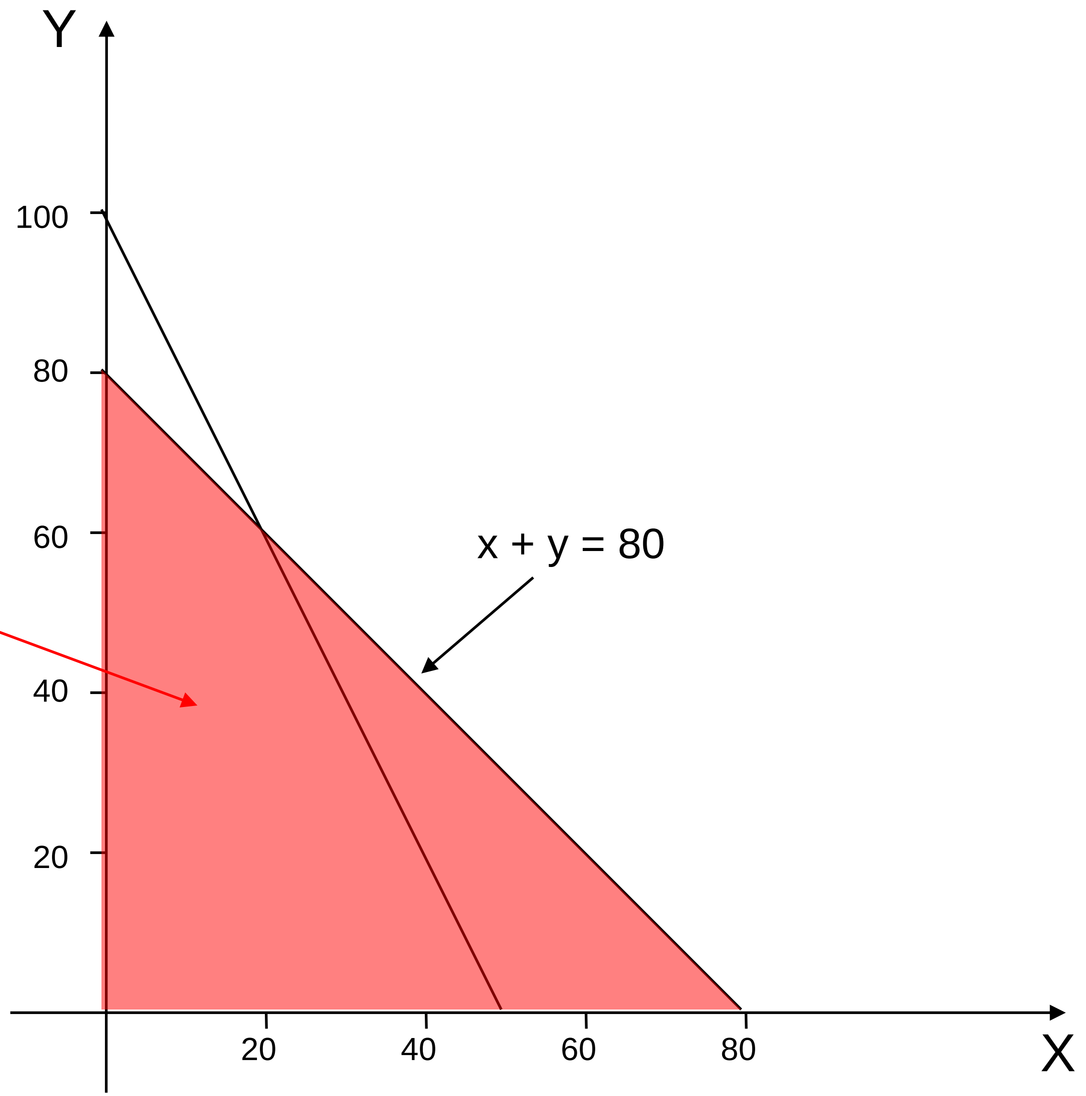
2 x + y ≤ 100

x + y ≤ 80

x ≤ 40

x ≥ 0

y ≥ 0



Dibujar la región factible

Restricciones

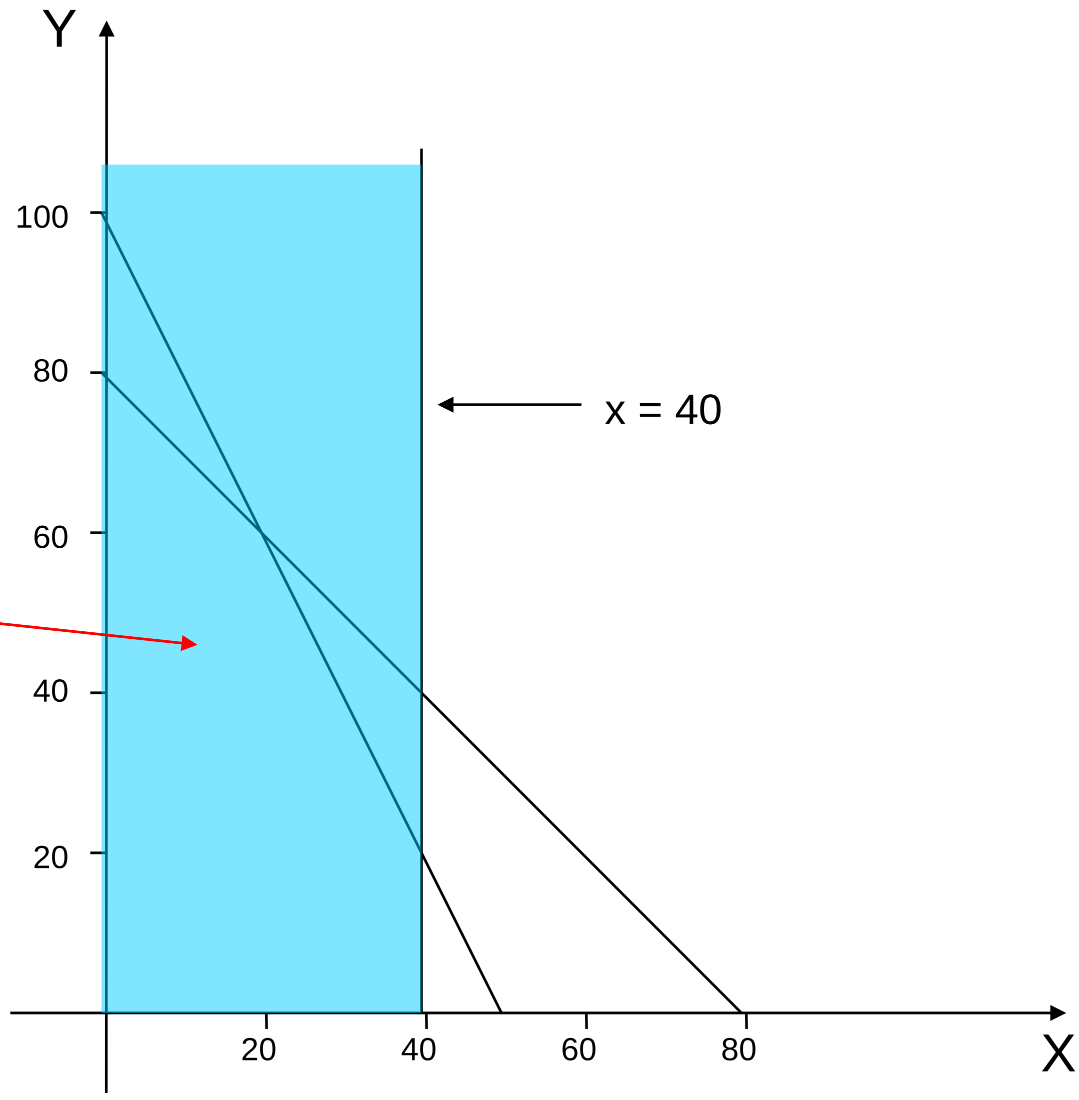
2 x + y ≤ 100

x + y ≤ 80

x ≤ 40

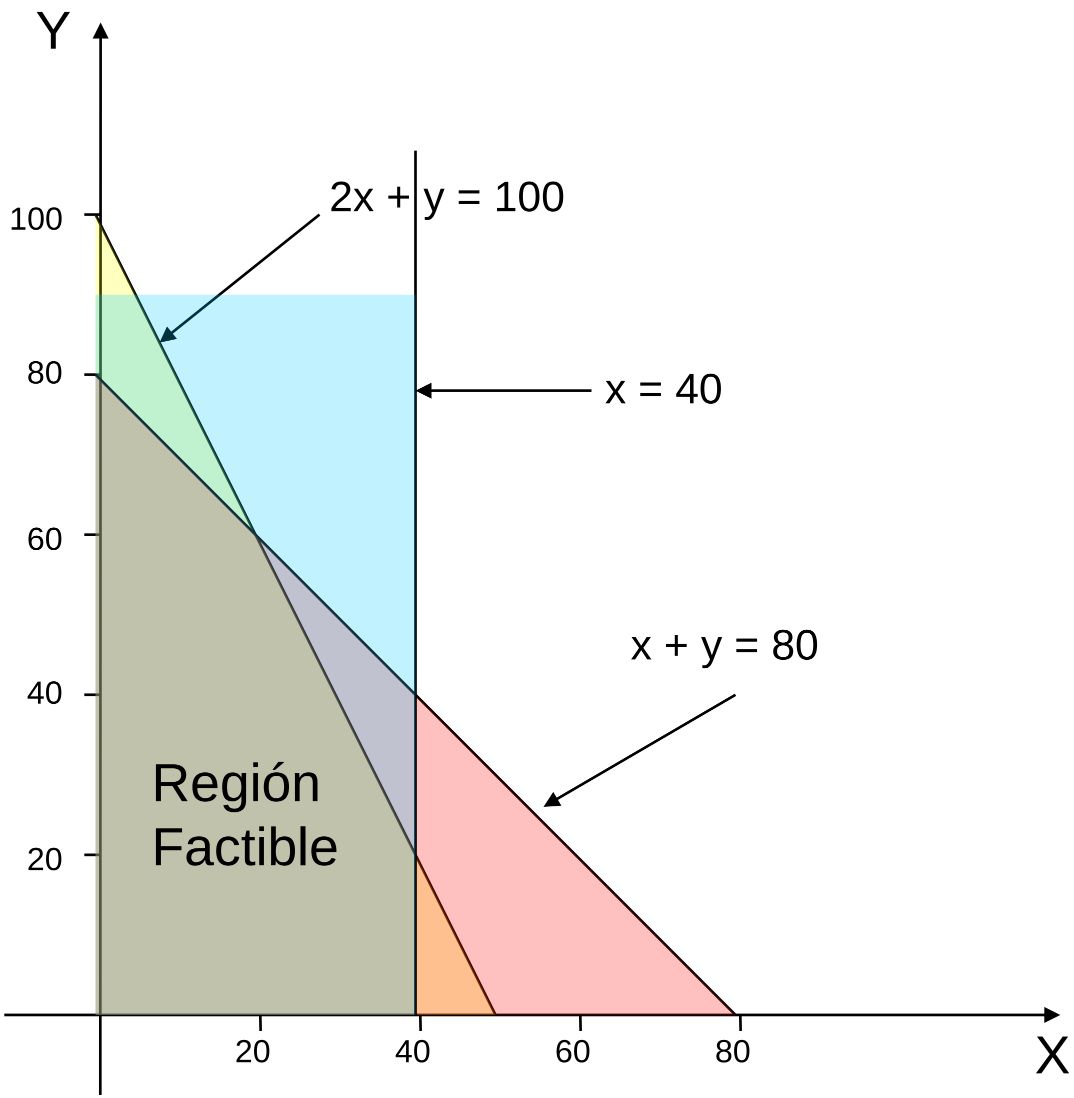
x ≥ 0

y ≥ 0



Dibujar la región factible

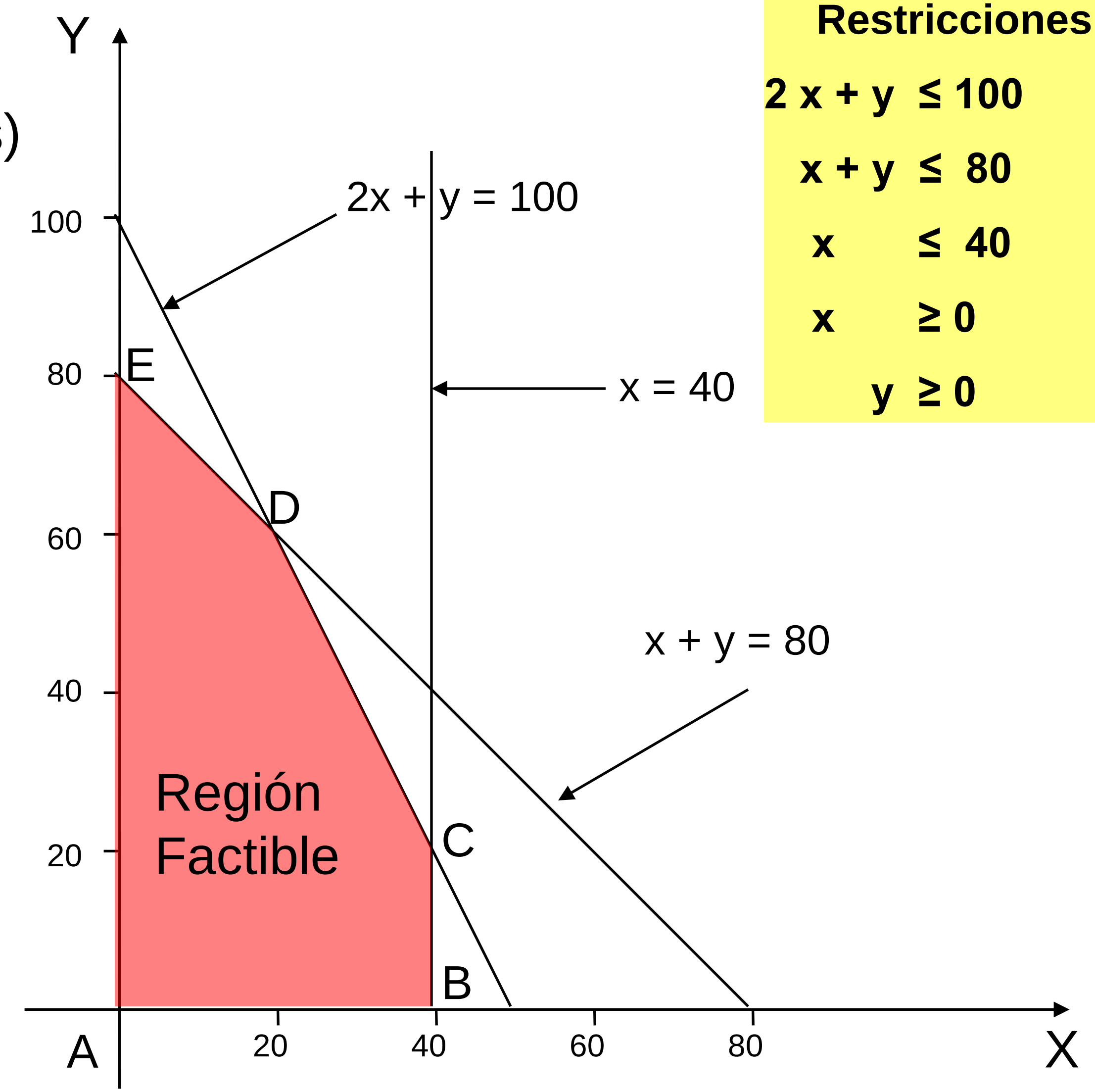
La intersección de todos estos semiplanos (restricciones) nos da la región factible



Vértices de la región factible

La región factible (al estar limitada por rectas) es un polígono.
En esta caso, el polígono ABCDE.

Como la solución óptima está en alguno de los vértices (A, B, C, D o E) de la región factible, calculamos esos vértices.



Restricciones

$$2x + y \le 100$$
$$x + y \le 80$$
$$x \le 40$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

Vértices de la región factible

Los vértices de la región factible son intersecciones de dos rectas. El punto D es la intersección de las rectas

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 100 \\ x + y &= 80 \end{aligned}\right\}$$

La solución del sistema x = 20, y = 60 nos da el punto D.

B es solución de

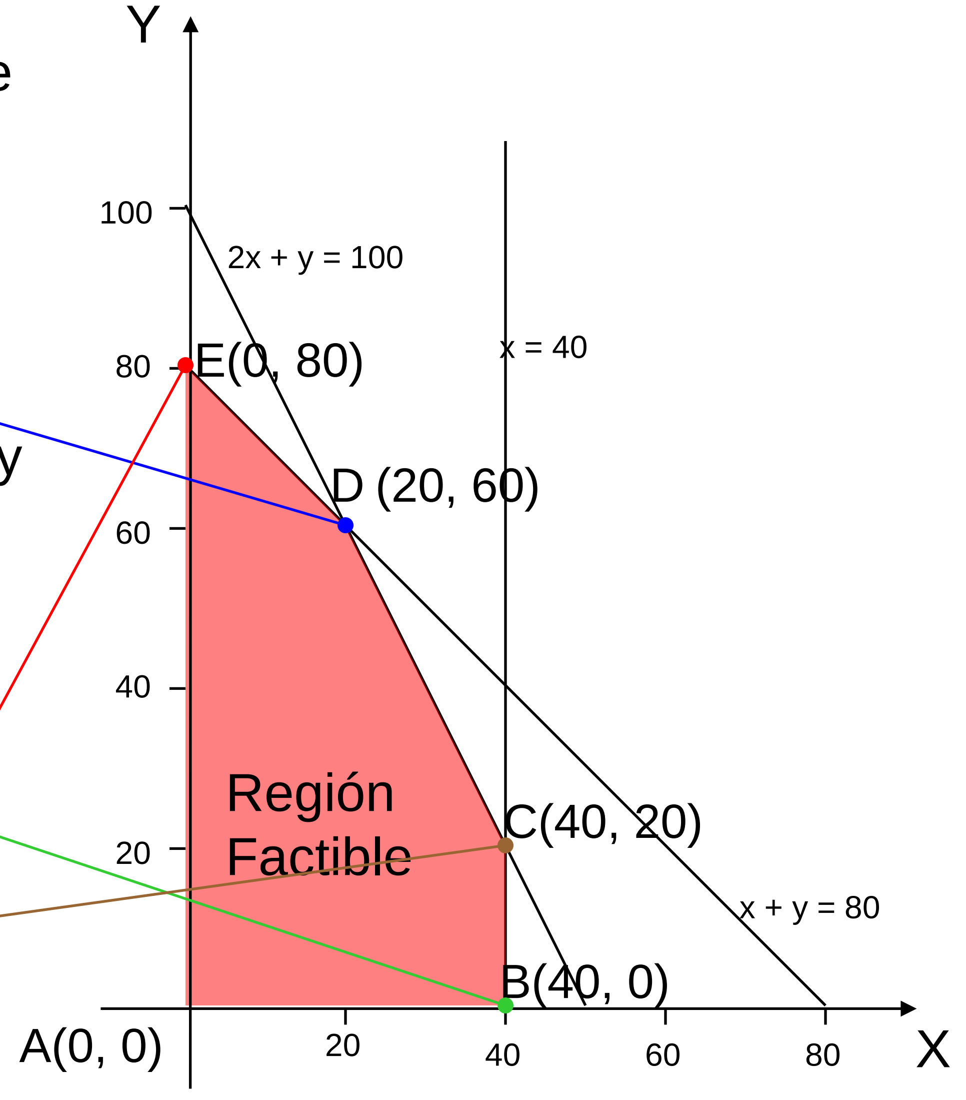
$$\left.\begin{aligned} x &= 40 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

C es solución de

$$\left.\begin{aligned} x &= 40 \\ 2x + y &= 100 \end{aligned}\right\}$$

E es solución de

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 80 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$



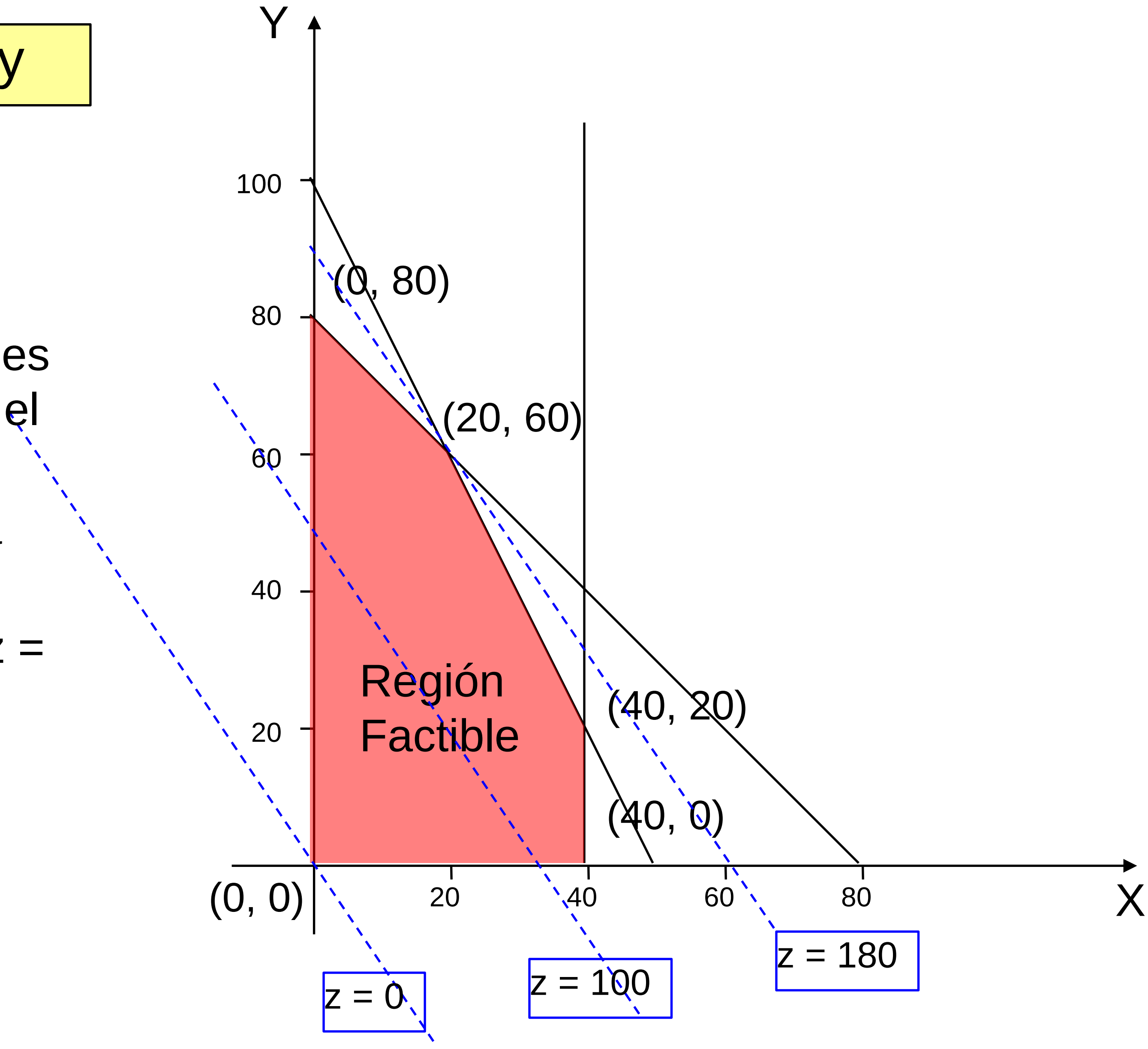
Resolución gráfica

Max z = 3x + 2y

Para hallar la solución óptima, dibujamos las rectas en las cuales los puntos tienen el mismo valor de z.

La figura muestra estas lineas para

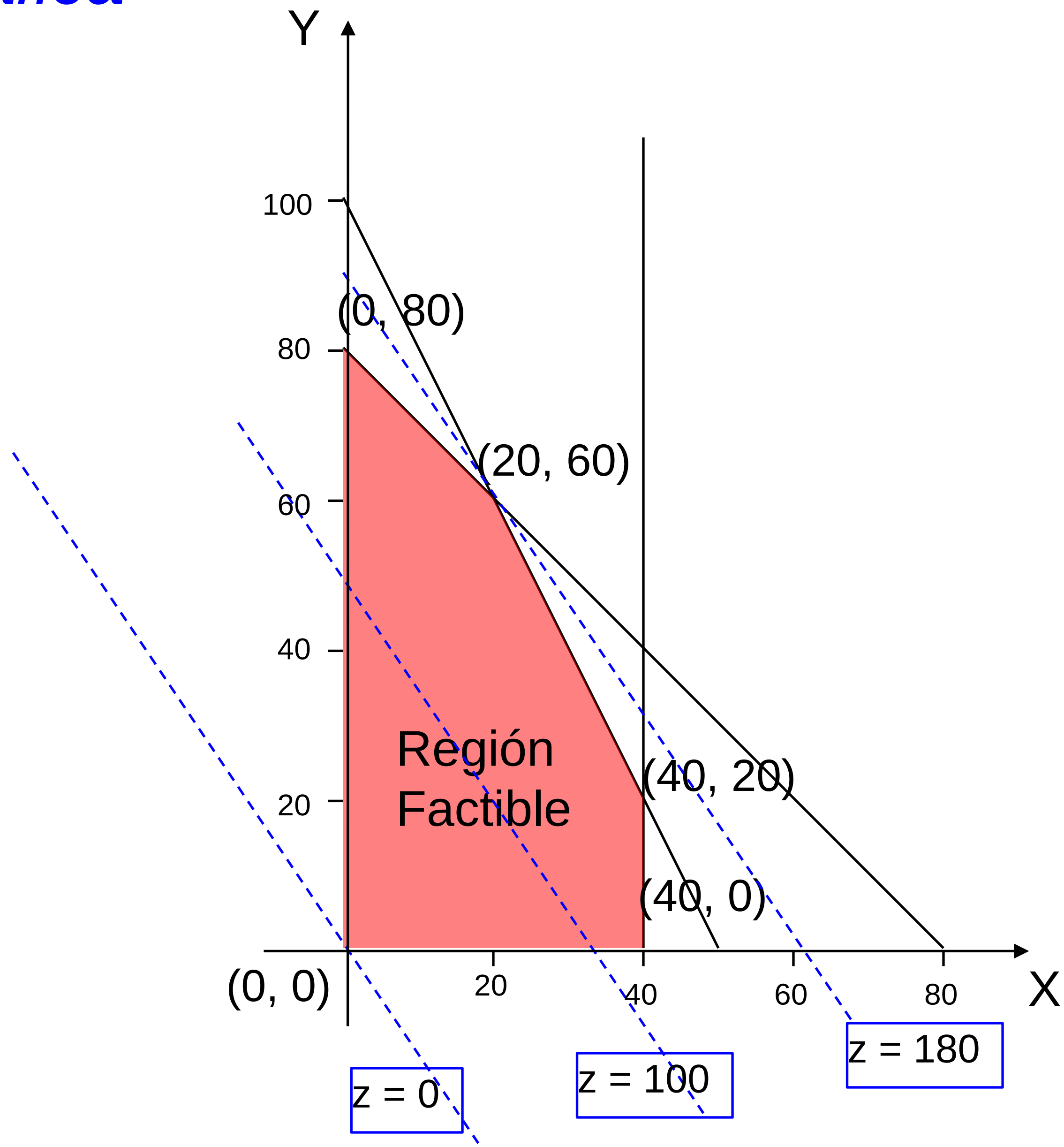
z = 0, z = 100, y z = 180



Resolución gráfica

$$\boxed{\text{Max } z = 3x + 2y}$$

La última recta de z que interseca (toca) la región factible indica la solución óptima para el PPL. Para el problema de Gepetto, esto ocurre en el punto D (x = 20, y = 60, z = 180).

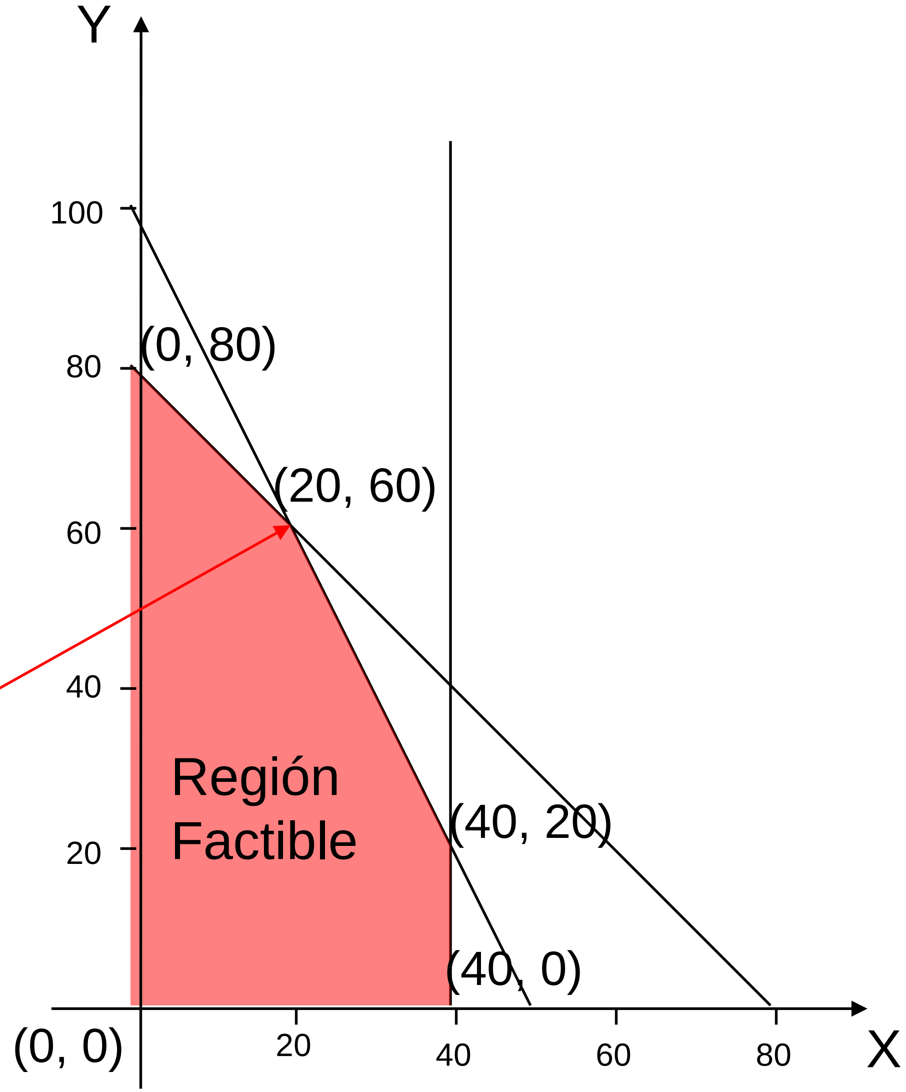


Resolución analítica

Max z = 3x + 2y

También podemos encontrar la solución óptima calculando el valor de z en los vértices de la región factible.

Vértice	z = 3x + 2y
(0, 0)	z = 3·0+2·0 = 0
(40, 0)	z = 3·40+2·0 = 120
(40, 20)	z = 3·40+2·20 = 160
(20, 60)	z = 3·20+2·60 = 180
(0, 80)	z = 3·0+2·80 = 160



La solución óptima es:
x = 20 muñecos
y = 60 trenes
z = 180 € de beneficio

Hemos identificado la región factible para el problema de Gepetto y buscado la solución óptima, la cual era el punto en la región factible con el mayor valor posible de z.

Recuerda que:

- La región factible en cualquier PPL está limitada por segmentos (es un polígono, acotado o no).
- La región factible de cualquier PPL tiene solamente un número finito de vértices.
- Cualquier PPL que tenga solución óptima tiene un vértice que es óptimo.

Un problema de minimización

Dorian Auto fabrica y vende coches y furgonetas.La empresa quiere emprender una campaña publicitaria en TV y tiene que decidir comprar los tiempos de anuncios en dos tipos de programas: del corazón y fútbol.

- Cada anuncio del programa del corazón es visto por 6 millones de mujeres y 2 millones de hombres.
- Cada partido de fútbol es visto por 3 millones de mujeres y 8 millones de hombres.
- Un anuncio en el programa de corazón cuesta 50.000 € y un anuncio del fútbol cuesta 100.000 €.
- Dorian Auto quisiera que los anuncios sean vistos por por lo menos 30 millones de mujeres y 24 millones de hombres.

Dorian Auto quiere saber cuántos anuncios debe contratar en cada tipo de programa para que el coste de la campaña publicitaria sea mínimo.

Formulación del problema:

• Cada anuncio del programa del corazón es visto por 6 millones de mujeres y 2 millones de hombres.
• Cada partido de fútbol es visto por 3 millones de mujeres y 8 millones de hombres.
• Un anuncio en el programa de corazón cuesta 50.000 € y un anuncio del fútbol cuesta 100.000 €.
• Dorian Auto quisiera que los anuncios sean vistos por por lo menos 30 millones de mujeres y 24 millones de hombres.

Dorian Auto quiere saber cuántos anuncios debe contratar en cada tipo de programa para que el coste de la campaña publicitaria sea mínimo.

	Corazón (x)	Fútbol (y)	
mujeres	6	3	$6x + 3y \geq 30$
hombres	2	8	$2x + 8y \geq 24$
Coste 1.000€	50	100	$50x + 100y$

Formulación del problema:

Variables de decisión: x = nº de anuncios en programa de corazón
y = nº de anuncios en fútbol

Min $z = 50x + 100y$		(función objetivo en 1.000 €)
s.a:	$6x + 3y \geq 30$	(mujeres)
	$2x + 8y \geq 24$	(hombres)
	$x, y \geq 0$	(no negatividad)

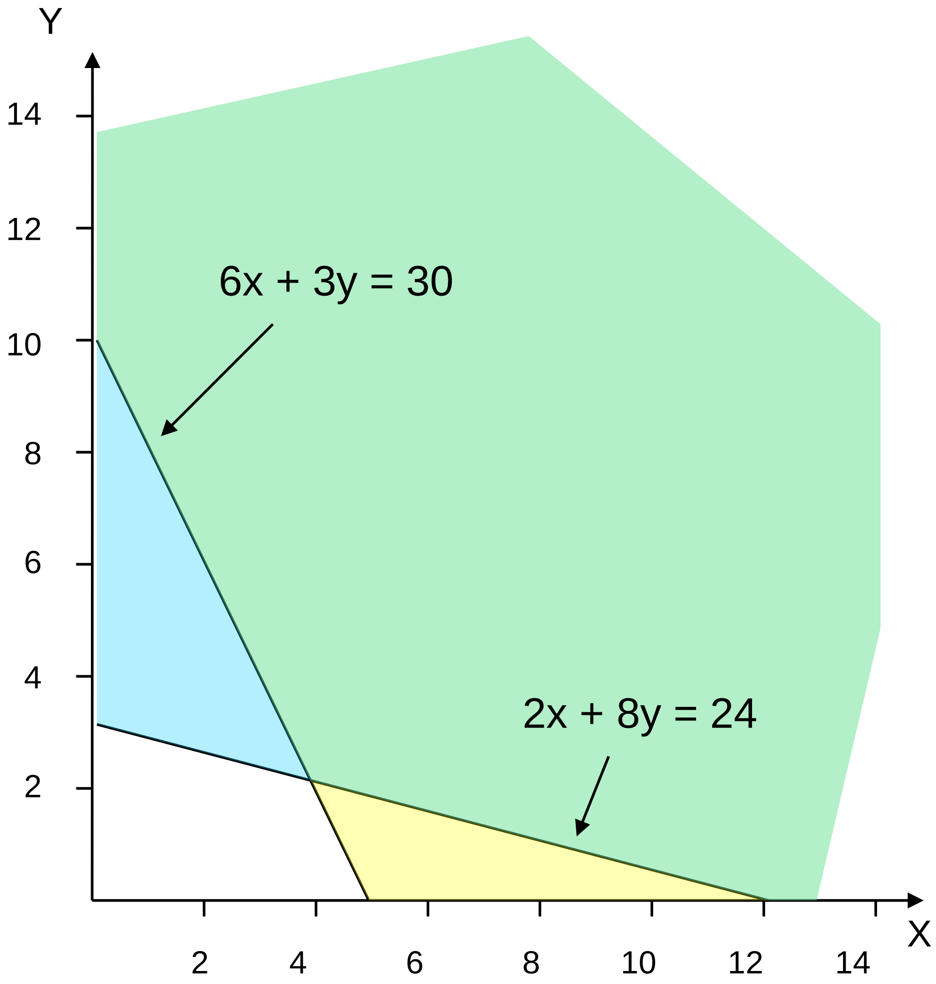
Dibujamos la región factible.

Min $z = 50x + 100y$

s.a. $6x + 3y \geq 30$

$2x + 8y \geq 24$

$x, y \geq 0$



Calculamos los vértices de la región factible:

El vértice A es solución del sistema

$$6x + 3y = 30$$
$$x = 0$$

Por tanto, A(0, 10)

El vértice B es solución de

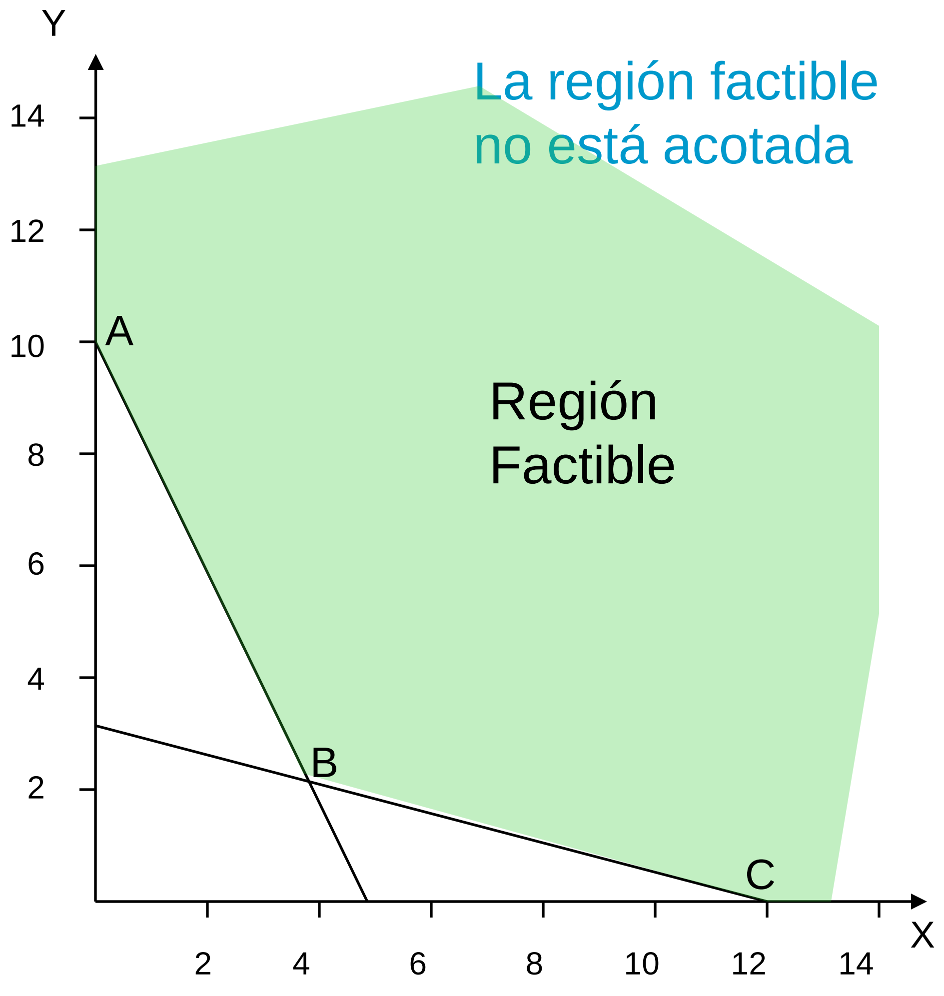
$$6x + 3y = 30$$
$$2x + 8y = 24$$

Por tanto, B(4, 2)

El vértice C es solución de

$$2x + 8y = 24$$
$$y = 0$$

Por tanto, C(12, 0)



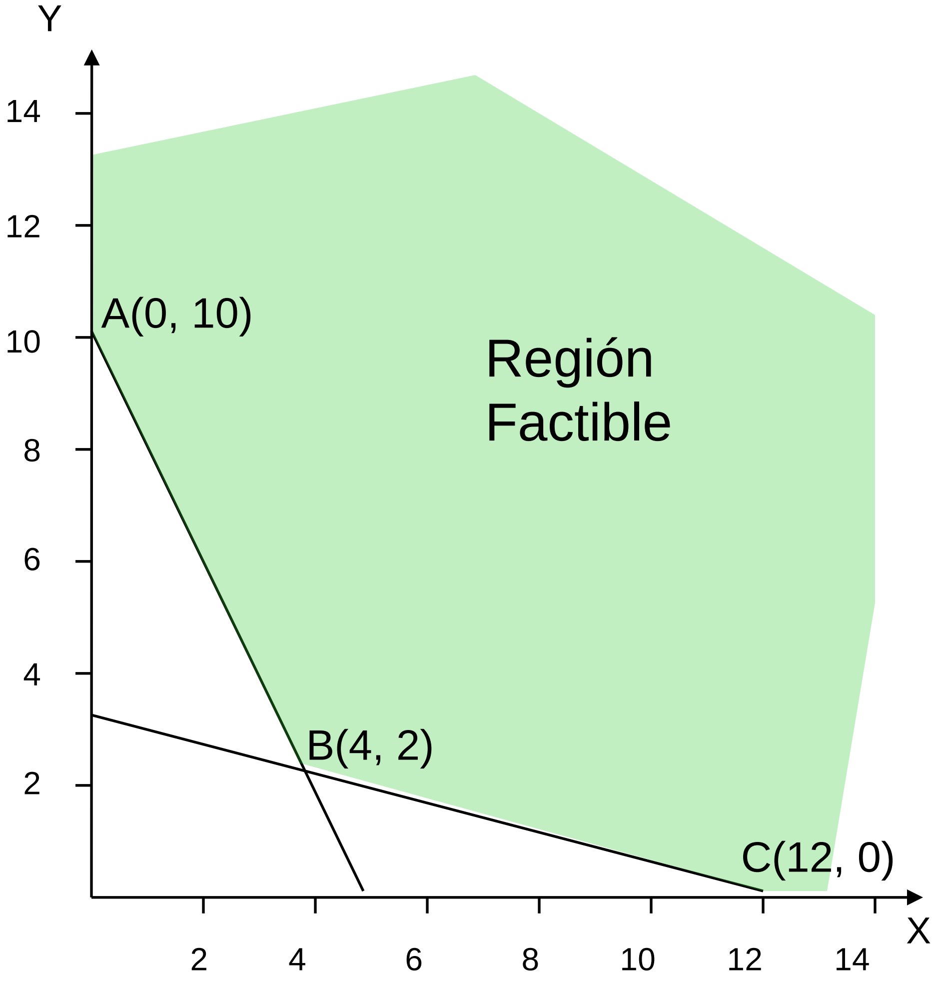
Resolvemos por el método analítico

Evaluamos la función objetivo z en los vértices.

Vértice	z = 50x + 100y
A(0, 10)	z = 50·0 + 100·10 = = 0+10000 = 10 000
B(4, 2)	z = 50·4 + 100·2 = = 200+200 = 400
C(12, 0)	z = 50·12 + 100·0 = = 6000+0 = 6 000

El coste mínimo se obtiene en B.

Solución:
x = 4 anuncios en pr. corazón
y = 2 anuncios en futbol
Coste z = 400 (mil €)



Resolvemos por el método gráfico

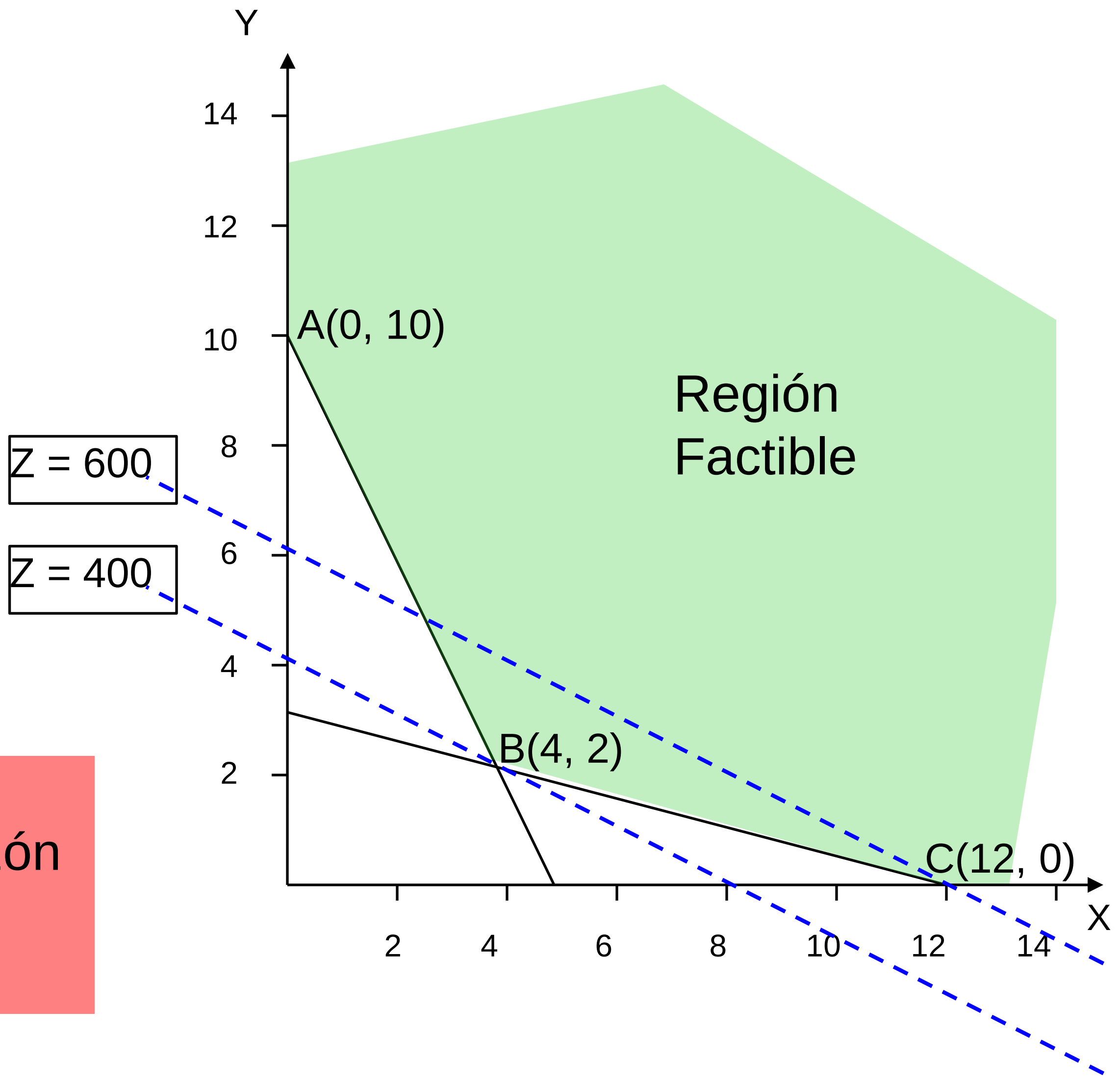
Min   z = 50 x + 100y

s.a.   6x + 3y ≥ 30

2x + 8y ≥ 24

x, y ≥ 0

El coste mínimo se obtiene en el punto B.



Solución:
x = 4 anuncios en pr. corazón
y = 2 anuncios en futbol
Coste z = 400 (mil €)

Número de Soluciones de un PPL

Los dos ejemplos anteriores, Gepetto y Dorian Auto, tienen, cada uno, una única solución óptima.
No en todos los PPL ocurre esto. Se pueden dar también las siguientes posibilidades:

- Algunos PPL tienen un número infinito de soluciones óptimas (alternativas o múltiples soluciones óptimas).
- Algunos PPL no tienen soluciones factibles (no tienen región factible).
- Algunos PPL son no acotados: Existen puntos en la región factible con valores de z arbitrariamente grandes (en un problema de maximización).

Veamos un ejemplo de cada caso.

Número infinito de soluciones óptimas

Consideremos el siguiente problema:

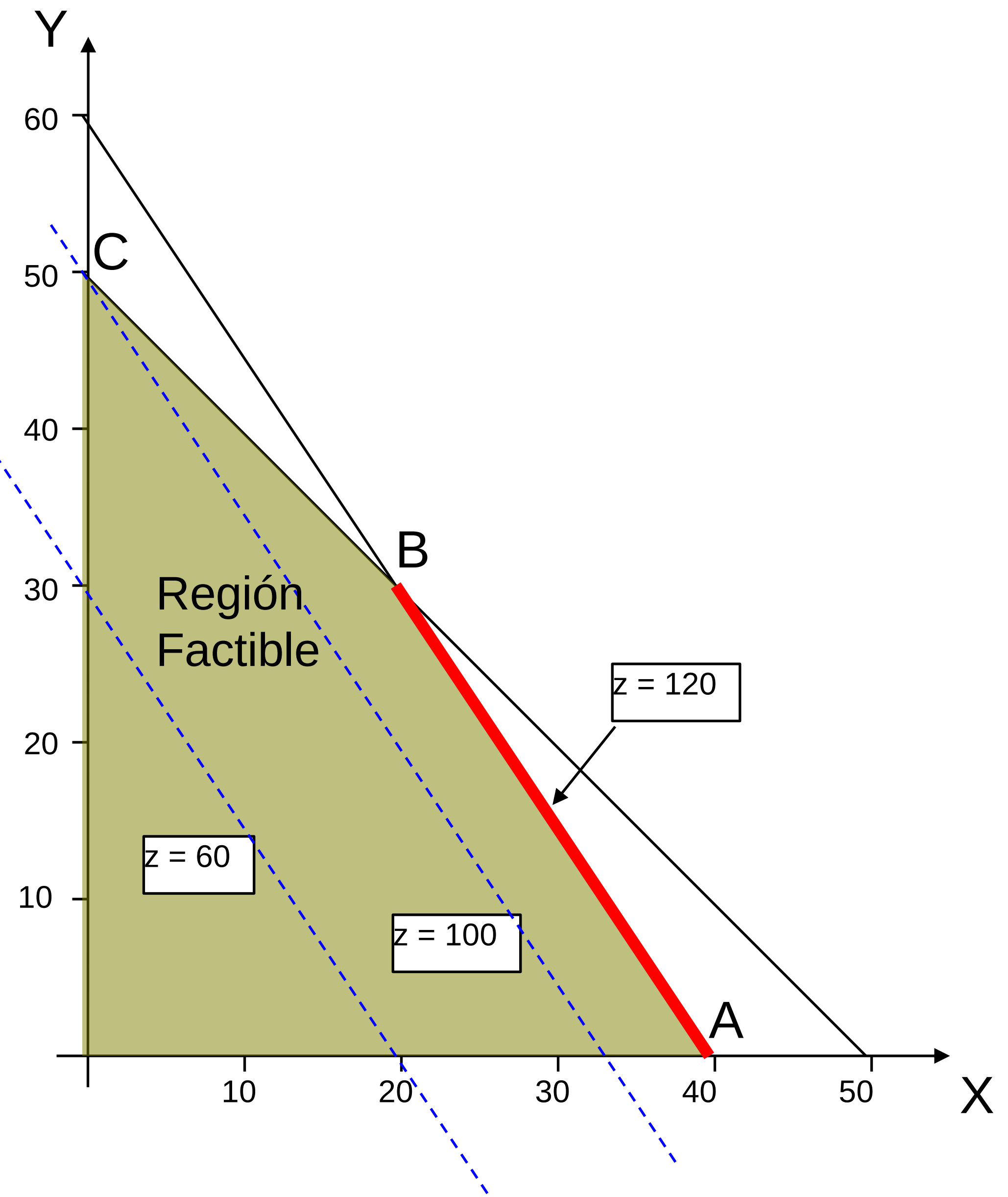
$$\max z = 3x + 2y$$

s.a: $3x + 2y \leq 120$

$x + y \leq 50$

$x , y \geq 0$

Cualquier punto (solución) situado en el segmento **AB** puede ser una solución óptima de z =120.



Sin soluciones factibles

Consideremos el siguiente problema:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a: $3x + 2y \leq 120$

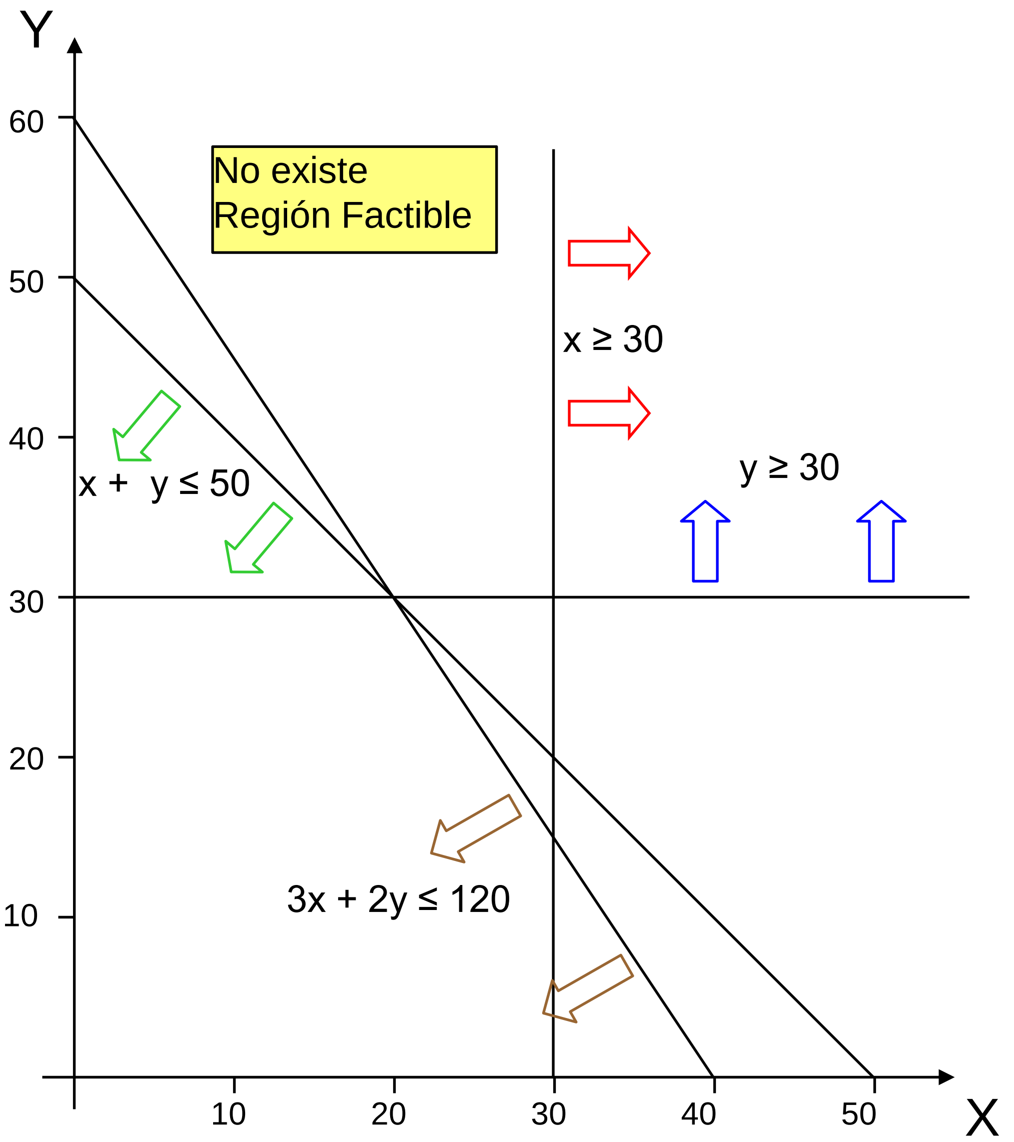
$x + y \leq 50$

$x \geq 30$

$y \geq 30$

$x , y \geq 0$

No existe región factible



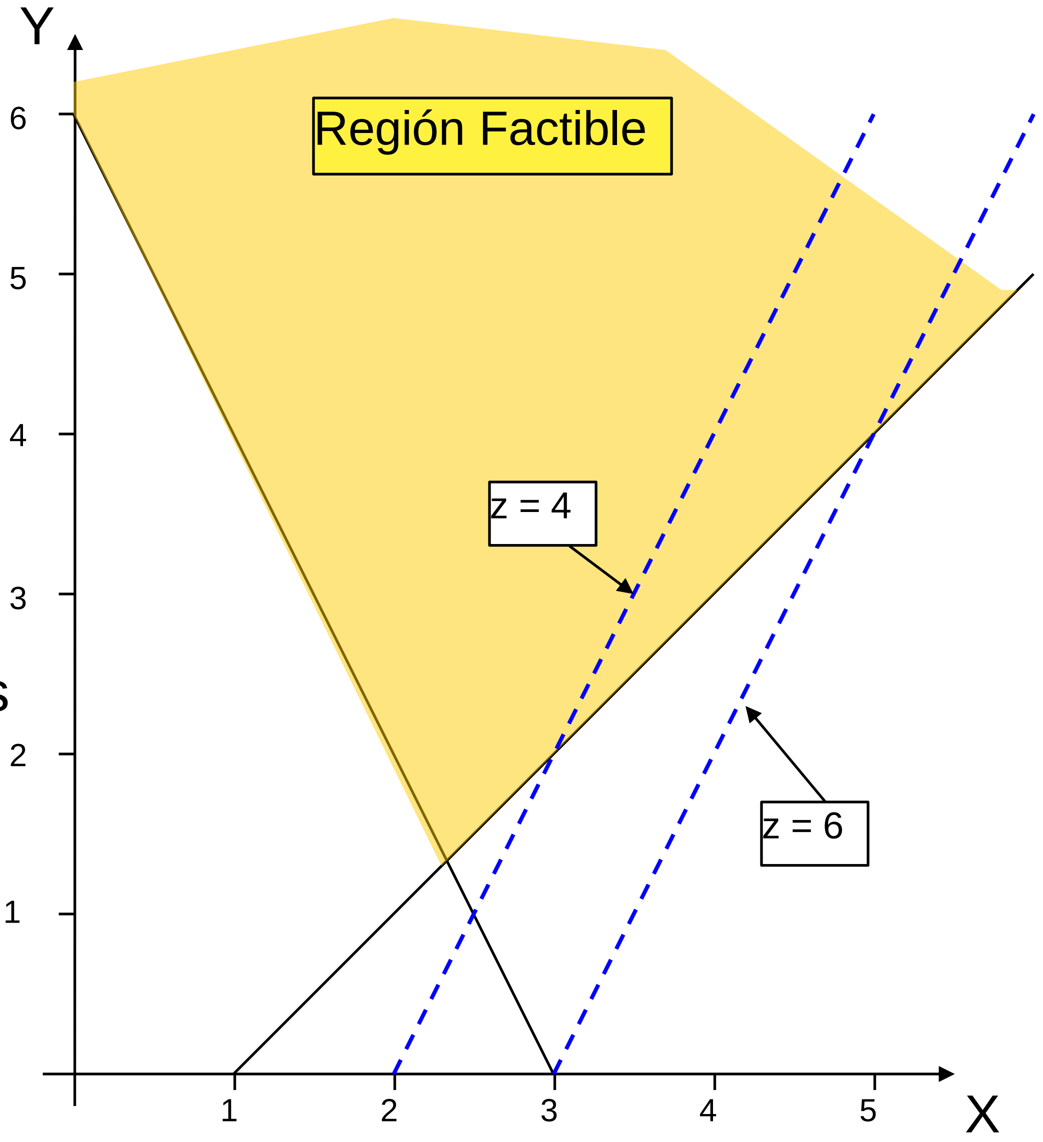
PPL no acotado

$$\max z = 2x - y$$

s.a: $x - y \leq 1$

$2x + y \geq 6$

$x, y \geq 0$



La región factible es no acotada. Se muestran en el gráfico las rectas de nivel para z = 4 y z = 6. Pero podemos desplazar las rectas de nivel hacia la derecha indefinidamente sin abandonar la región factible. Por tanto, el valor de z puede crecer indefinidamente.